

Hong Kong Mathematics Olympiad (2022/23)

Heats – Individual Event

香港數學競賽 (2022/23)

初賽個人項目

Unless otherwise stated, all answers should be given in exact numerals in their simplest form.

No approximation is accepted.

The diagrams are not necessarily drawn to scale.

除特別指明外，所有答案須以數字的真確值表達，並化至最簡。

不接受近似值。

所有附圖不一定依比例繪成。

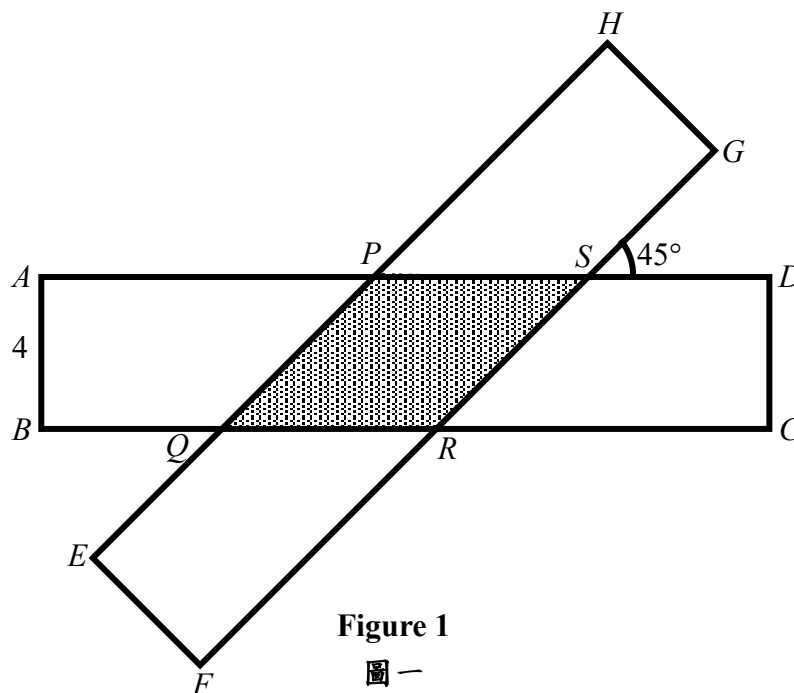
Part A

甲部

1. Given that a and b are real numbers. If $a^2 + b^2 - 8a + 34b + 305 = 0$, find the value of $a + b$.
已知 a 及 b 均為實數。若 $a^2 + b^2 - 8a + 34b + 305 = 0$ ，求 $a + b$ 的值。
2. If x and y are positive integers satisfying $x + 8xy + y = 28$, find the largest possible value of $x + 2y$.
若 x 及 y 均為正整數且滿足 $x + 8xy + y = 28$ ，求 $x + 2y$ 的最大可能值。
3. Let m be an integral constant, where $4 < m < 40$. If the equation $x^2 - 2(2m - 3)x + 4m^2 - 14m + 8 = 0$ has two integral roots, find the largest possible value of x .
設 m 為一個整數常數，其中 $4 < m < 40$ 。若方程 $x^2 - 2(2m - 3)x + 4m^2 - 14m + 8 = 0$ 有兩個整數根，求 x 的最大可能值。
4. Let a be a positive real number. If $a^2 + \frac{1}{a^2} = 14$, find the value of $a^3 + \frac{1}{a^3}$.
設 a 為一正實數。若 $a^2 + \frac{1}{a^2} = 14$ ，求 $a^3 + \frac{1}{a^3}$ 的值。
5. The sum of a certain number of positive integers is 60. The largest positive integer is 15 and one of the positive integers is 12. Apart from this positive integer 12, the remaining positive integers form an arithmetic sequence. Find the smallest positive integer.
若干正整數之和是 60。最大正整數為 15 及其中有一個正整數是 12。除卻這正整數 12，其餘正整數恰好組成一個等差數列。求最小的正整數。

6. In Figure 1, the rectangle $ABCD$ is rotated about its centre 45° anticlockwise to obtain the rectangle $EFGH$. If $AB = 4$, find the area of the shaded region $PQRS$.

在圖一中，把長方形 $ABCD$ 繞它的中心逆時針轉 45° 得長方形 $EFGH$ 。若 $AB = 4$ ，求陰影部分 $PQRS$ 的面積。



7. Evaluate $\left(\frac{1 \times 4 \times 16 \times 64 + 2 \times 8 \times 32 \times 128 + 3 \times 12 \times 48 \times 192 + \cdots + 2023 \times 8092 \times 32368 \times 129472}{1 \times 5 \times 25 \times 125 + 2 \times 10 \times 50 \times 250 + 3 \times 15 \times 75 \times 375 + \cdots + 2023 \times 10115 \times 50575 \times 252875} \right)^{\frac{1}{6}}$.

求 $\left(\frac{1 \times 4 \times 16 \times 64 + 2 \times 8 \times 32 \times 128 + 3 \times 12 \times 48 \times 192 + \cdots + 2023 \times 8092 \times 32368 \times 129472}{1 \times 5 \times 25 \times 125 + 2 \times 10 \times 50 \times 250 + 3 \times 15 \times 75 \times 375 + \cdots + 2023 \times 10115 \times 50575 \times 252875} \right)^{\frac{1}{6}}$ 的值。

8. If the area of an equilateral triangle is numerically equal to its perimeter, find the radius of the circumcircle of this equilateral triangle.

若一個等邊三角形的面積與其周界在數值上相等，求該正三角形的外心圓的半徑。

9. In Figure 2, P be a point inside the square $ABCD$ such that $\triangle ABP \cong \triangle ADP$, $AP = 5\sqrt{2}$ and $BP = 13$. Find the area of the square $ABCD$.

在圖二中， P 為正方形 $ABCD$ 內的一點使得 $\triangle ABP \cong \triangle ADP$ 、 $AP = 5\sqrt{2}$ 及 $BP = 13$ 。求正方形 $ABCD$ 的面積。

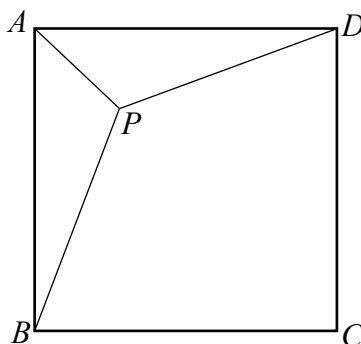


Figure 2

圖二

10. In Figure 3, D , E and F are the points lying on BC , AC and AB respectively. AD , BE and CF intersect at P such that area of $\triangle APF = 84$, area of $\triangle BPD = 40$, area of $\triangle CPD = 30$ and area of $\triangle CPE = 35$. Find the area of $\triangle ABC$.

在圖三中， D 、 E 及 F 分別為 BC 、 AC 及 AB 上的點。 AD 、 BE 及 CF 相交於 P 使得 $\triangle APF$ 的面積 = 84、 $\triangle BPD$ 的面積 = 40、 $\triangle CPD$ 的面積 = 30 及 $\triangle CPE$ 的面積 = 35。求 $\triangle ABC$ 的面積。

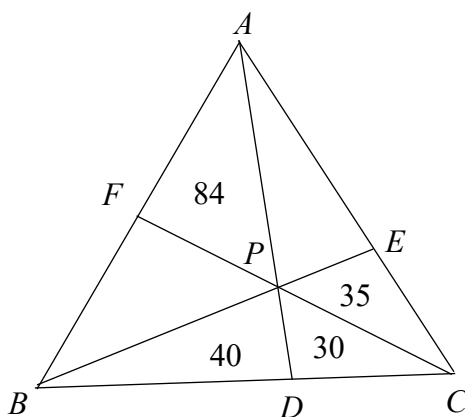


Figure 3

圖三

Part B

乙部

11. Given that n is a positive integer less than 2023. If n has only 3 distinct factors, find the number of possible values of n .

已知 n 是一個少於 2023 的正整數。若 n 只有三個不同的因數，求 n 的可能性的總數。

12. Given that p and q are positive numbers. If $\log_9 p = \log_{15} q = \log_{25} (3p + 2q)$, find the value of $\frac{p}{q}$.

已知 p 及 q 為正實數。若 $\log_9 p = \log_{15} q = \log_{25} (3p + 2q)$ ，求 $\frac{p}{q}$ 的值。

13. A sequence of numbers $\{a_n\}$ is defined by $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{7}$ and $a_n = \frac{a_{n-2}a_{n-1}}{2a_{n-2} - a_{n-1}}$ for all $n \geq 3$. Find the value of $\frac{1}{a_{2023}}$.

數列 $\{a_n\}$ 的定義為 $a_1 = 1$ 、 $a_2 = \frac{3}{7}$ 及對所有 $n \geq 3$ ， $a_n = \frac{a_{n-2}a_{n-1}}{2a_{n-2} - a_{n-1}}$ 。求 $\frac{1}{a_{2023}}$ 的值。

14. ABC is an isosceles triangle with $AB = AC = 18$ and $BC = 12$. P is any interior point of $\triangle ABC$ such that $\angle ABP + \angle ACP = 90^\circ$ and $AP = 15$. Find the value of $BP^2 + CP^2$.
 ABC 是一個等腰三角形，其中 $AB = AC = 18$ 及 $BC = 12$ 。 P 為 $\triangle ABC$ 內的任意一點使得 $\angle ABP + \angle ACP = 90^\circ$ 及 $AP = 15$ 。求 $BP^2 + CP^2$ 的值。

15. Find the product of the roots of the equation $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-4} = \sqrt[3]{x-2}$.

求方程 $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-4} = \sqrt[3]{x-2}$ 的根之積。

END

完